

УДК 681.5

**МЕТОДИКА ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ  
ПИ-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ  
СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**

С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина

Томский политехнический университет  
E-mail: [saga@tpu.ru](mailto:saga@tpu.ru), [eza-tanya@yandex.ru](mailto:eza-tanya@yandex.ru)

**Гайворонский Сергей Анатольевич**, канд. техн. наук, доцент кафедры автоматики и компьютерных систем Института кибернетики ТПУ.

E-mail: [saga@tpu.ru](mailto:saga@tpu.ru)

Область научных интересов: робастный анализ и синтез систем автоматического управления.

**Езангина Татьяна Александровна**, магистрант кафедры автоматики и компьютерных систем Института кибернетики ТПУ.

E-mail: [eza-tanya@yandex.ru](mailto:eza-tanya@yandex.ru)

Область научных интересов: робастный анализ и синтез систем автоматического управления.

Разработана процедура выбора настроек линейного регулятора, обеспечивающих максимальную степень устойчивости системы с интервальными параметрами. В основу процедуры положены оценка корневых робастных показателей качества (колебательности и степень устойчивости) с применением коэффициентного подхода.

**Ключевые слова:**

Интервальный полином, синтез регулятора, максимальная степень устойчивости.

**Введение**

В реальных автоматических системах параметры объекта управления, как правило, известны неточно или могут изменяться по заранее неизвестным законам в определенных пределах. Такие параметры относятся к классу интервальных. Для оценки работоспособности системы желательно определить ее наихудшее качество в наихудшем режиме. Такое качество называют робастным и определяют при наихудших сочетаниях интервальных коэффициентов ИХП [1].

Для осуществления регулирования объектами управления, как правило, используют типовые регуляторы. В зависимости от выбранного вида регулятор может иметь пропорциональную характеристику (П-регулятор), пропорционально-интегральную характеристику (ПИ-регулятор), пропорционально-дифференциальную характеристику (ПД-регулятор) или пропорционально-интегральную (изодромную) характеристику с воздействием по производной (ПИД-регулятор).

Наиболее распространенным на практике является ПИ-регулятор, который обладает следующими достоинствами: обеспечивает нулевую статическую ошибку регулирования, обеспечивает управление с минимально возможной средне-квадратичной ошибкой регулирования.

На сегодняшний день задача о выборе настроечных параметров регулятора линейной интервальной системы управления, которые обеспечивают ей максимальную степень устойчивости, актуальна в различных областях науки и техники, где необходимо обеспечить малую чувствительность качества процессов управления в системе к изменению характеристик объекта.

Данная работа посвящена определению для системы автоматического управления (САУ) с интервальными параметрами таких настроек регулятора, при которых степень устойчивости системы принимает максимальное значение при условии, что колебательность должна быть не больше допустимой.

Задачи синтеза систем управления с максимальной степенью устойчивости рассмотрены в работах [2–4]. Предложенные там методы основаны на использовании нормированных полиномов и применении к ним достаточных условий оптимальности по степени устойчивости. Однако разработанные подходы приемлемы только для САУ низких порядков.

Решение поставленной задачи предлагается проводить с применением коэффициентных оценок показателей качества, на основе которых разработаны простые достаточные условия устойчивости и качества САУ [5].

### Постановка задачи

Рассмотрим САУ со структурой, которая приведена на рис. 1.



Рис. 1. Структура САУ

В качестве интервального объекта управления выберем объект управления 3-го порядка, имеющего передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{b}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \text{ где } \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i.$$

В качестве линейного регулятора будем использовать ПИ-регулятор с передаточной функцией:

$$W_P = \frac{K_n + K_D s}{s},$$

здесь  $K_n$ ,  $K_D$  – параметры регулятора.

Для дальнейшего синтеза ПИ-регулятора получим интервальный характеристический полином:

$$D(s) = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0, \quad (1)$$

где  $d_4 = a_3$ ,  $d_3 = a_2$ ,  $d_2 = a_1$ ,  $d_1 = a_0 + bK_D$ ,  $d_0 = K_n b$ .

Область возможных значений интервальных параметров системы (многогранник  $P_n$ , являющийся прямоугольным гиперпараллелепипедом) отображается на комплексную плоскость корней в виде областей локализации корней и отрезков вещественной оси, где локализуются вещественные корни (рис. 2).

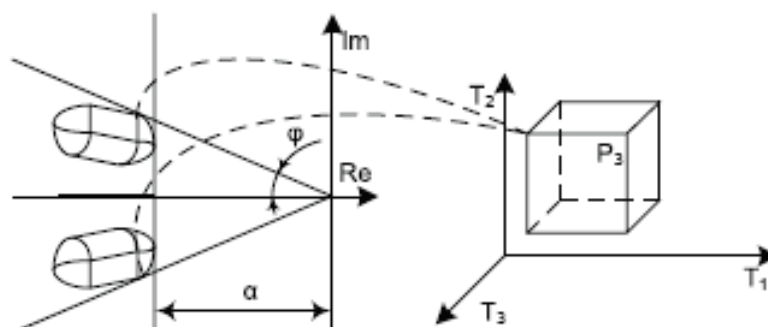


Рис. 2. Отображение многогранника интервальных коэффициентов и расположение корней в заданном секторе

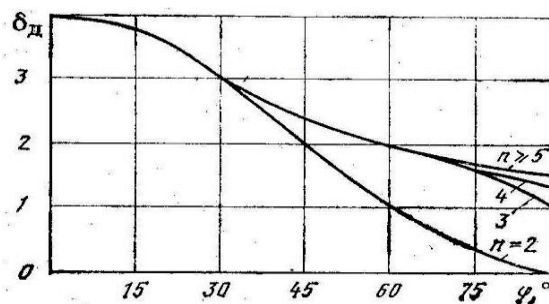
Необходимо определить настройки ПИ-регулятора, обеспечивающие максимальное расстояние от мнимой оси до ближайшего корня

**Основные соотношения для синтеза ПИ-регулятора**

Рассмотрим один из корневых показателей качества системы – колебательность  $\mu = \text{tg}(\varphi)$ . Очевидно, что при нестабильности параметров системы этот показатель качества может изменяться. Поэтому представляет интерес задача определения углового сектора расположения корней по коэффициентам интервального характеристического полинома. В [5] приведено выражение для определения показателей колебательности  $\delta_i$  в системе с постоянными параметрами. На основе данного выражения и интервального анализа запишем выражение для системы с интервальными параметрами:

$$\delta_i = \frac{\overline{d_i^2}}{\overline{d_{i-1} d_{i+1}}} > \delta_\delta, i = \overline{1, n-2}, \tag{2}$$

где  $\delta_\delta$  – допустимый показатель колебательности, определяемый из рис. 3.



**Рис. 3.** Допустимый показатель колебательности

Другим, не менее важным, корневым показателем качества системы является степень устойчивости. Степень устойчивости – расстояние от мнимой оси до ближайшего корня. Ее знание позволяет дать оценку скорости затухания переходного процесса в САУ.

На основе выражения для максимальной степени устойчивости для стационарной системы [5] и интервального анализа можно записать достаточные условия максимальной робастной степени устойчивости для интервальной системы.

$$\lambda_i = \frac{\overline{a_{m-1} a_{m+2}}}{(\overline{a_m - a_{m+1} (n-m-1)\eta})(\overline{a_{m+1} - a_{m+2} (n-m-2)\eta})} = 0,465 \quad i = \overline{1, n-2} \tag{3}$$

$$\lambda_j < 0,465 \quad j = \overline{1, n-2} \quad i \neq j \tag{4}$$

$$\overline{a_k} \leq \overline{a_{k+1} (n-k-1)\eta} \tag{5}$$

$$\overline{a_0 - a_1\eta + 2a_2 \frac{\eta^2}{3}} \geq 0. \tag{6}$$

Преобразуем полином (1) к виду:

$$D(y) = c_4 y^4 + c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0, \tag{7}$$

где  $c_4 = d_4, c_3 = d_3, c_2 = d_2, c_1 = d_1, c_0 = d_0$ .

Пусть допустимый показатель колебательности  $\delta_\delta = 1,7$ , что соответствует расположению корней характеристического уравнения в секторе  $\varphi = 50^\circ$ . Тогда на основании (2) и (7), найдем выражение для параметра регулятора  $K_\delta$

$$\delta_2 = \frac{c_2^2}{c_1 c_3} = 1,7 \Rightarrow \delta_2 = \frac{a_1^2}{(a_0 + b k_\delta) a_2} = 1,7 \Rightarrow k_\delta = \frac{a_1^2 - 1,7 a_0 a_2}{1,7 b a_2}. \tag{8}$$

Из выражения (3) определим параметр регулятора  $k_n$  через  $\eta$  (степень устойчивости)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\overline{c_0} \overline{c_3}}{(\overline{c_1} - 2\overline{c_2}\eta)(\overline{c_2} - \eta\overline{c_3})} = 0,465 \Rightarrow \frac{k_n \overline{ba_2}}{((\overline{a_0} + bk_{\delta}) - 2\overline{a_1}\eta)(\overline{a_1} - \eta\overline{a_2})} \Rightarrow$$

$$k_n = \frac{0,465((\overline{a_0} + bk_{\delta}) - 2\overline{a_1}\eta)(\overline{a_1} - \eta\overline{a_2})}{\overline{ba_2}}. \quad (9)$$

Подставим выражения (8) и (9) и достаточное условие колебательности (2) для интервальной системы в (4)–(6) и получим следующую систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\tilde{n}_1} \overline{\tilde{n}_4}}{(\overline{\tilde{n}_2} - h\overline{c_3})\overline{c_3}} - 0,465 < 0; \\ \overline{c_1} \leq 2\overline{\tilde{n}_2}\eta; \\ \overline{\tilde{n}_2} \leq \eta\overline{c_3}; \\ \overline{c_0} - \overline{\tilde{n}_1}\eta + 2\overline{\tilde{n}_2} \frac{\eta^2}{3} \geq 0; \\ \frac{\overline{c_2}^2}{\overline{c_1} \overline{c_3}} - 1,7 > 0; \\ \frac{\overline{c_3}^2}{\overline{c_2} \overline{c_4}} - 1,7 > 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Решение данной системы позволяют определить максимальную степень устойчивости САУ при заданном ограничении на ее колебательность.

### Пример синтеза

Пусть коэффициенты полинома (7) принимают следующие значения  $c_4 \in [0,05; 0,1]$ ,  $c_3 \in [0,8; 0,9]$ ,  $c_2 \in [2,6; 3]$ ,  $c_1 \in [0,5+k_{\delta}; 1+k_{\delta}]$ ,  $c_0 = k_n$  (11). Подставим в (8) значения коэффициентов (11) и вычислим параметр регулятора  $K_{\delta}$ .

$$k_{\delta} = \frac{\overline{d_1}^2 - 1,7\overline{d_0}\overline{d_2}}{1,7b \overline{d_2}} = \frac{5,23}{1,53} = 3,4. \quad (12)$$

Решив систему уравнений (10) с имеющимися условиями (11) и (12)

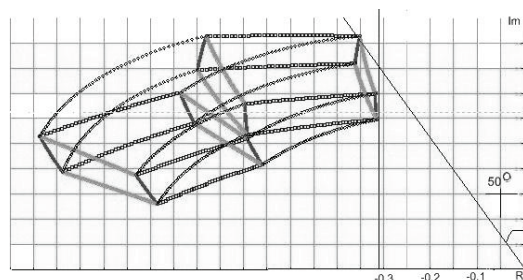
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,44}{2,34 - 0,81\eta} < 0; \\ 3,9 \leq 6\eta; \\ 2,34 \leq 0,81\eta; \\ k_n(\eta) - 4,4\eta + 1,7\eta^2 \geq 0; \\ \frac{15,3}{3k_n(\eta)} - 1,7 > 0; \\ \frac{0,64}{0,3} - 1,7 > 0. \end{array} \right.$$

найдем максимальную степень устойчивости  $\eta = 0,32$ .

С помощью выражения (9) и значения  $\eta$  рассчитаем коэффициент усиления  $k_n$

$$k_n = \frac{0,465((\overline{d_0} + bk_{\delta}) - 2\overline{d_1}\eta)(\overline{d_1} - \eta\overline{d_2})}{\overline{bd_2}} = \frac{-2,18}{-0,9} = 2,4.$$

Области локализации корней полинома (11) с найденными настройками ПИ-регулятора имеет вид, показанный на рис. 4.



**Рис. 4.** Области локализации корней полинома (11) с найденными настройками ПИ-регулятора

Из рис. 4 видно, что предъявленные к системе требования выполняются, а именно максимальная робастная степень устойчивости  $\eta = 0,31$  и колебательность интервальной САУ не превышает  $\text{tg}(50^\circ)$ .

### Заключение

Методы синтеза САУ объектами с переменными параметрами будут эффективны только в том случае, если без большой вычислительной и графической работы можно определять параметры регулятора САУ при изменении параметров объекта управления. Для этой цели наилучшим образом подходят коэффициентные методы, когда качество САУ оцениваются по коэффициентам передаточной функции без построения переходных процессов. В работе получены достаточные условия робастного качества (максимальной степени устойчивости и заданной степени колебательности), определяемые по коэффициентам интервального характеристического полинома. На основе этих условий разработана методика параметрического синтеза ПИ-регулятора.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Шубладзе А.М. Способы синтеза систем управления максимальной степенью устойчивости // АиТ. – 1980. – № 1. – С. 28–37.
3. Ким Д.П. Синтез регулятора максимальной степени устойчивости // Приводная техника. – 2003. – № 4. – С. 52–57.
4. Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем // Изд-во. АН СССР. ОТН. – 1945. – № 12. – С. 117–119.
5. Петров Б.Н., Сокоов Н.И., Липатов А.В. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. Инженерные методы анализа и синтеза: – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.

Поступила 12.05.2012 г.