

УДК 621.37

**СИНТЕЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ
С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ**

А.В. Воронин, Т.А. Щелканова

Томский политехнический университет

E-mail: 3ene4ka@sibmail.com

Воронин Александр Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики ТПУ.

E-mail: voroninav@tpu.ru

Область научных интересов: теория автоматического управления, моделирование систем, исследование систем управления автономными объектами.

Щелканова Татьяна Алексеевна, магистрант кафедры интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики ТПУ.

E-mail: 3ene4ka@sibmail.com

Область научных интересов: теория автоматического управления, исследование систем управления для неустойчивых и нейтральных объектов.

Статья посвящена исследованию компенсационного метода синтеза полиномиальных регуляторов с учетом изменений в управляемости и наблюдаемости замкнутой системы. Проанализирован алгоритм получения регуляторов по методу желаемой передаточной функции, позволяющий получить близкие показатели качества как по управлению, так и по возмущению.

Ключевые слова:

Система автоматического регулирования, передаточная функция, нули, полюсы, возмущающее воздействие, управляющее воздействие.

Введение

Подход к синтезу регуляторов линейных систем посредством предварительного выбора желаемой передаточной функции замкнутой системы известен достаточно давно [1]. Операторно-структурная схема, коэффициент усиления системы автоматического регулирования (САР) и технически осуществимые параметры регулятора опре-

деляются из условия равенства передаточной функции проектируемой системы регулирования и желаемой передаточной функции. Метод прост и нагляден, достаточно формализован и приводит к явному решению в форме передаточной функции регулятора определенной структуры и конкретных параметров.

Вместе с тем, использование метода желаемой передаточной функции требует осторожного обращения. Его применение без предварительного анализа свойств объекта управления может привести к неработоспособной замкнутой системе, прежде всего, из-за проблем с грубостью.

Известно несколько модификаций метода желаемой передаточной функции. Алгоритм, изложенный в работе [2] предполагает, что сокращение правых и нулевых полюсов и нулей в передаточных функциях объекта и регулятора является недопустимым из-за соображений грубости системы, левые же нули могут и даже должны сокращаться.

Такой подход имеет ряд особенностей, в частности, в связи с тем, что задача у САР двоякая. С одной стороны, САР должна наиболее точно обрабатывать задающий сигнал, с другой – минимально пропускать на выход возмущающие воздействия. При этом обычно предполагается, что изучение переходной функции по управлению позволяет судить и о прохождении через систему возмущающих воздействий. Но это справедливо только тогда, когда в передаточной функции системы нет сокращающихся нулей и полюсов. Более того, когда система достаточно далека от границы неуправляемости или ненаблюдаемости. В противном случае синтез на основе переходной функции по управлению может не дать желаемого результата.

Описание метода желаемой передаточной функции

Идея синтеза регулятора методом желаемой передаточной функции состоит в том, что для известной передаточной функции объекта

$$W_0(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0}{r_n s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \dots + r_0}$$

и желаемой функции замкнутой системы $W_{\text{ж}}(s)$ в соответствии с рис. 1 можно записать

$$\frac{W_{\text{pez}}(s) \cdot W_0(s)}{1 + W_{\text{pez}}(s) \cdot W_0(s)} = W_{\text{ж}}(s), \quad (1)$$

где $W_{\text{pez}}(s)$ – искомая передаточная функция регулятора.

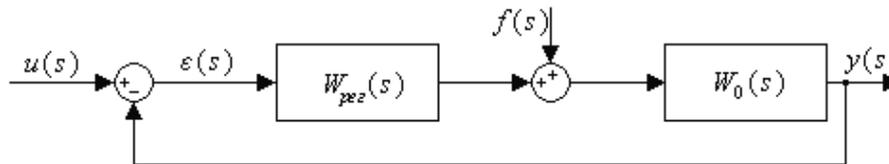


Рис. 1. Структурная схема системы регулирования

Разрешив равенство (1) относительно $W_{\text{pez}}(s)$, получаем:

$$W_{\text{pez}}(s) = \frac{1}{W_0(s)} \cdot \frac{W_{\text{ж}}(s)}{1 - W_{\text{ж}}(s)}. \quad (2)$$

В соответствии с методикой [2] выполним факторизацию передаточной функции объекта, то есть представим ее в виде

$$W_0(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{P^-(s) \cdot P^+(s)}{R^-(s) \cdot R^+(s)},$$

где $P^-(s)$, $R^-(s)$ – полиномы с левыми нулями, $P^+(s)$, $R^+(s)$ – полиномы с правыми и нейтральными нулями. Будем считать, что полиномы $P^+(s)$, $R^+(s)$ имеют единицу при старшей степени s . Это всегда можно сделать, отнеся коэффициент передачи к $P^-(s)$, $R^-(s)$. Подставив в (2) факторизованную передаточную функцию объекта управления, получим

$$W_{\text{pez}}(s) = \frac{R^-(s) \cdot R^+(s)}{P^-(s) \cdot P^+(s)} \cdot \frac{W_{\text{ж}}(s)}{1 - W_{\text{ж}}(s)}.$$

Для того чтобы правые полюсы и нули объекта не могли быть скомпенсированы правыми нулями и полюсами регулятора, его передаточная функция не должна содержать полинома $R^+(s)$ в числителе и полинома $P^+(s)$ в знаменателе. Это возможно, если выполняются условия

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{P^-(s) \cdot M(s)}{G(s)}, \quad (3)$$

$$1 - W_{\text{ж}}(s) = \frac{R^+(s) \cdot N(s)}{G(s)}, \quad (4)$$

где $M(s)$ и $N(s)$ – некоторые неопределенные полиномы, а $G(s)$ – знаменатель желаемой передаточной функции $W_{\text{ж}}(s)$. Исключив $W_{\text{ж}}(s)$ из (3) и (4) получим основное уравнение синтеза

$$P^+(s) \cdot M(s) + R^+(s) \cdot N(s) \cdot s^r = G(s), \quad (5)$$

из которого, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях обеих частей полиномиального уравнения (5), могут быть получены коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$.

Передаточную функцию регулятора с учетом (3) и (4) можно представить в виде

$$W_{\text{pez}}(s) = \frac{R^-(s)}{P^-(s)} \cdot \frac{M(s)}{N(s) \cdot s^r}. \quad (6)$$

Выбор порядков полиномов $G(s), N(s), M(s)$ выполняется из условий разрешимости, физической осуществимости и грубости, которые могут быть записаны в виде системы неравенств относительно степеней рассматриваемых полиномов. Для этого введем величину n_K для обозначения порядка полинома $K(s)$.

Из условия физической реализуемости желаемой передаточной функции (4) можно записать условие

$$n_G \geq n_{P^+} + n_M, \quad (7)$$

где n_G, n_{P^+}, n_M – порядки полиномов $G(s), P^+(s), M(s)$, соответственно.

Относительный порядок передаточной функции в левой части (4) равен нулю. Соответственно относительный порядок передаточной функции в правой части (4) также должен быть равен нулю

$$n_G = n_{R^+} + n_N + r, \quad (8)$$

где r – необходимый порядок астатизма синтезируемой системы.

Для выполнения условия грубости, необходимо, чтобы относительный порядок передаточной функции регулятора был неотрицательным. Очевидно, что это условие выполняется, если

$$n_{R^-} + n_M \leq n_{P^-} + n_N + r. \quad (9)$$

Еще одно условие связано с числом уравнений, получаемых из соотношения (5). Так как число уравнений, которые могут быть сформированы равно $n_G + 1$, а число неизвестных равно $n_M + n_N + 2$, для разрешимости системы должно выполняться неравенство

$$n_G + 1 \leq n_M + n_N + 2 \text{ или } n_G \leq n_M + n_N + 1. \quad (10)$$

Выражения (7–10) являются основой при определении степеней полиномов $M(s)$ и $N(s)$. Из этих же соотношений может быть получены неравенства для определения порядка синтезируемой системы

$$n_G - n_R \geq n_{R^+} - n_{P^-} + r - 1, \quad (11)$$

$$n_G \geq n_R - n_{P^-}. \quad (12)$$

Полученным условиям отвечает большое число различных регуляторов, которые могут существенно отличаться по сложности, обеспечиваемым точностным и динамическим показателям, и т. д.

Особенностью описанного метода является его «заточенность» на определенную передаточную функцию, т. е. на определенную пару «вход–выход», так как он принципиально предполагает сокращение устойчивых пар левых нулей и полюсов. В результате такого сокращения система становится неуправляемой или ненаблюдаемой, но только по управляющему входу. По возмущающему входу потери управляемости или наблюдаемости может не быть, соответственно переходные процессы и установившиеся режимы по разным входам могут иметь существенно различные характеристики. Причем, эта разница будет тем больше, чем существеннее отличаются друг от друга исходная и желаемая динамики замкнутой системы.

Пусть мы имеем неустойчивый объект с передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{16}{s^2 - 16}. \quad (13)$$

Операторно-структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 1 и содержит два входа – по управлению $u(t)$ и по возмущению $f(t)$. Рассмотрим различные варианты интегро-дифференцирующих компенсационных регуляторов с точки зрения обеспечения одних и тех же характеристических уравнений по различным входам.

Исходя из уравнений (11, 12) физически реализуемый регулятор для объекта (13) может быть получен при выборе желаемого полинома замкнутой системы второго порядка. При-

мом, что желаемая замкнутая система является статической и что желаемым является биномиальное размещение полюсов в точке $s = -10$. Соответственно

$$G(s) = (s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100.$$

Из условия (9) получаем $N(s) = n_1s + n_0$. С учетом условия реализуемости полином $M(s)$ может иметь нулевой порядок, т. е. $M(s) = m_0$. Подставив $M(s)$ и $N(s)$ в уравнение (5) имеем

$$n_1s^2 + (n_0 - 4n_1)s + (m_0 - 4n_0) = s^2 + 20s + 100.$$

Сформированная на основе полученного уравнения система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} n_1 &= 1, \\ n_0 - 4n_1 &= 20, \\ m_0 - 4n_0 &= 100 \end{aligned}$$

имеет единственное решение: $n_1 = 1, n_0 = 24, m_0 = 196$, и передаточная функция регулятора получается в виде

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{s + 4}{16} \cdot \frac{196}{s + 24}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по управлению с учетом сокращения левого полюса объекта и левого нуля регулятора записывается как $W_{\text{зам}}(s) = \frac{196}{(s + 10)^2}$.

Легко проверить, что полученная система является ненаблюдаемой и мода, соответствующая полюсу $s = -4$, не проходит на выход.

Однако передаточная функция по возмущению, вычисленная на основе схемы на рис. 1, равна

$$W_f(s) = \frac{16(s + 24)}{(s + 4)(s + 10)^2}.$$

Как видно, здесь нет сокращения нуля и полюса и даже нет близких нуля и полюса. Таким образом, переходная функция по возмущению имеет третий порядок и содержит моду, которую по управлению удалось компенсировать.

Ниже на рис. 2 представлены две кривые переходных процессов: одна соответствует переходному процессу по управлению, другая – по возмущению. Кривые нормированы по уровню. Видно, что процесс по возмущению существенно более затянут. Очевидно, это следствие того, что устойчивый полюс объекта не скомпенсирован.

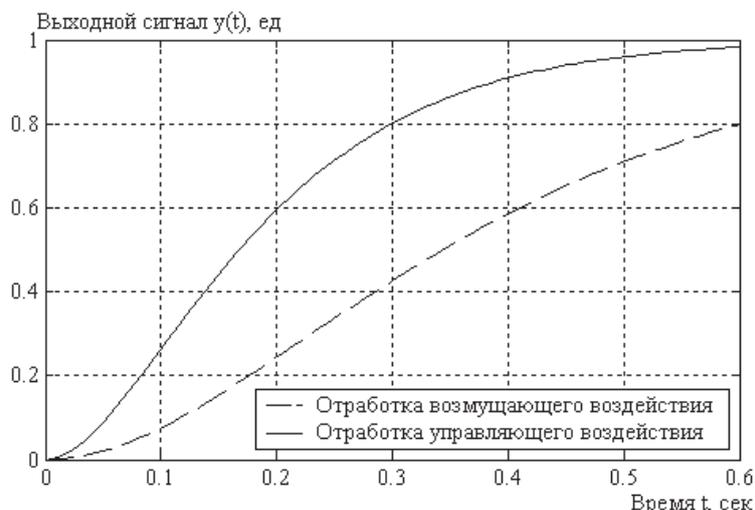


Рис. 2. Переходные характеристики: по управлению и по возмущению

Очевидно также, что одинаковые или близкие по времени установления процессы по управлению и возмущению могут быть получены только в случае, если нет сокращения нуля и полюса и, более того, нет близких нуля и полюса. Для того чтобы это обеспечить следует воспользоваться формулами, исключающими получение диполей.

В этом случае формулы (3) и (4) расчета имеют вид

$$W_{ж}(s) = \frac{P(s)}{G(s)} M(s), \quad (14)$$

$$1 - W_{ж}(s) = \frac{R(s)}{G(s)} N(s), \quad (15)$$

а формула (6)

$$W_{pez}(s) = \frac{M(s)}{N(s)}. \quad (16)$$

Основное полиномиальное уравнение синтеза (6) записывается как

$$P(s)M(s) + R(s)N(s) = G(s).$$

Набор ограничений на порядки полиномов $G(s), N(s), M(s)$ из условий разрешимости, физической осуществимости и грубости, имеет вид

$$n_G \leq n_M + n_N + 1, \quad (17)$$

$$n_M \leq n_N + r, \quad (18)$$

$$n_G = n_R + n_N + r, \quad (19)$$

$$n_G \geq n_P + n_M + r. \quad (20)$$

Ограничения снизу на порядок желаемой передаточной функции системы n_G имеют вид

$$n_G \geq 2n_R - 1. \quad (21)$$

Вернемся к примеру. В соответствии с (21) минимальный порядок желаемого полинома $G(s)$ равен трем.

Сохраняя принцип биномиального распределения, примем

$$G(s) = (s + 10)^3 = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000.$$

Для данного случая из (19) имеем $N(s) = n_1s + n_0$. Соответственно, по (17) и (18) полином $M(s)$ должен быть не выше первого порядка. Из условия разрешимости (20) имеем $M(s) = m_1s + m_0$.

Условия (14), (15) выглядят как

$$W_{ж}(s) = \frac{16}{(s + 10)^3} M(s), \quad 1 - W_{ж}(s) = \frac{(s^2 - 16)}{(s + 10)^3} N(s),$$

и уравнение синтеза (6) имеет вид

$$16 M(s) + (s^2 - 16) N(s) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000. \quad (22)$$

Подставив в $N(s)$ и $M(s)$ в (22) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s , получим систему уравнений

$$n_1 = 1;$$

$$n_0 = 30;$$

$$16m_1 - 16n_1 = 300;$$

$$16m_0 - 16n_0 = 1000.$$

Отсюда $m_1 = 19,75; m_0 = 92,5; n_1 = 1; n_0 = 30$ и передаточная функция регулятора в соответствии с (16) равна

$$W_{pec}(s) = \frac{19,75s + 92,5}{s + 30} = \frac{19,75(s + 4,68)}{s + 30}.$$

В этом случае передаточная функция по возмущению для системы на рис. 1, имеет вид $W_f(s) = \frac{16(s + 30)}{(s + 10)^3}$, т. е. передаточная функция по возмущению имеет такой же полином в знаменателе, что и передаточная функция по управлению.

На рис. 3 приведены нормированные по уровню графики переходных функций замкнутой системы по управлению и возмущению. Видно, что длительности переходных процессов близки.

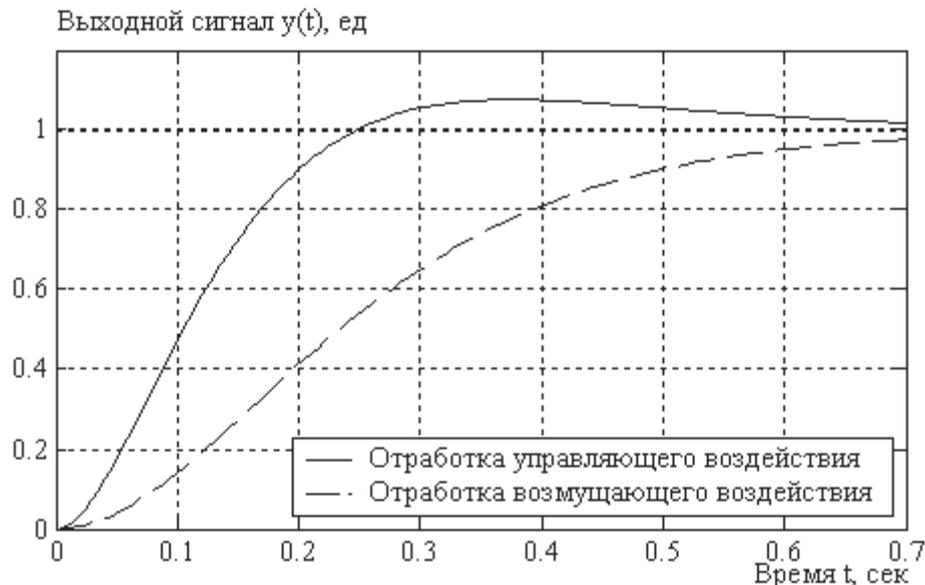


Рис. 3. Переходные характеристики: по управлению и по возмущению

Таким образом, использование регулятора, не содержащего в своей структуре элементов, приводящих к сокращению части передаточной функции объекта управления, обеспечивает регулирование как по управляющему воздействию, так и по возмущению, действующим на объект, причем показатели времени регулирования этих процессов близки.

Выводы

Представленные результаты говорят о том, что метод желаемой передаточной функции в модификации [2], связанный с сокращением нулей и полюсов системы и с переходом к не полностью управляемой или не полностью наблюдаемой системе, дает, в общем случае, различное качество управления по различным входам, в частности по управлению и по возмущению. Если актуальным является получение близких показателей качества по разным входам, предпочтительным является метод, не связанный с сокращениями нулей и полюсов, хотя и приводящий к более высоким порядкам полиномиальных регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

Поступила 10.07.2012 г.