

УДК 532.137+519.6

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ  
ГЕЛЕОБРАЗОВАНИЯ**

В.М. Галкин, А.В. Богословский\*

Томский политехнический университет

E-mail: vlg@tpu.ru

\*Институт химии нефти СО РАН, г. Томск

E-mail: bav@ipc.tsc.ru

**Галкин Владислав Михайлович**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., доцент кафедры геологии и разработки нефтяных месторождений Института природных ресурсов ТПУ.

E-mail: vlg@tpu.ru

Область научных интересов: механика, численные методы.

**Богословский Андрей Владимирович**, канд. хим. наук, ст. науч. сотр. Институт химии нефти СО РАН, г. Томск.

E-mail: bav@ipc.tsc.ru

Область научных интересов: физическая и коллоидная химия.

Рассмотрены уравнения, описывающие движение зонда вибрационного датчика вязкости в гелеобразующей вязкоупругой среде. Описано получение приближенных решений для определения вязкости и сдвиговой упругости, и проведено сравнение с точным решением.

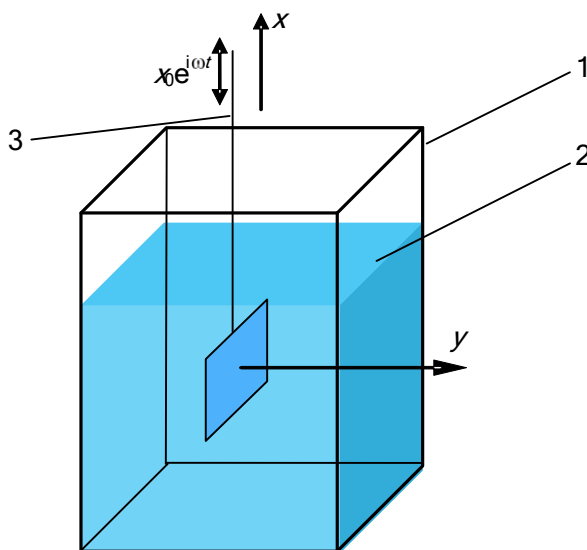
**Ключевые слова:**

Гелеобразующий состав, вязкость, упругость, механическое сопротивление.

**Введение**

Гелеобразующие составы (ГОС) используются для управления фильтрационными потоками при добыче полезных ископаемых, для законтурной гидроизоляции полигона при подземном захоронении отходов и во многих других практически важных процессах. При этом большое значение имеет кинетика потери текучести, которая во многом определяет возможность использования конкретной рецептуры.

Динамика образования гелей может регистрироваться методом вибрационной вискозиметрии (ВВ) [1]. Для этого в неподвижный сосуд с исследуемым образцом, как показано на рис. 1, погружают вертикально колеблющийся зонд с пластиной и измеряют действующую на нее со стороны вмещающей среды тормозящую силу (сопротивление). Пластина генерирует поперечные сдвиговые волны, распространяющиеся перпендикулярно ее поверхности.



**Рис. 1.** Геометрия эксперимента. 1 – измерительный сосуд; 2 – образец; 3 – колеблющийся зонд с пластиной

Так как при гелеобразовании изменяется не только вязкость, но и на определенном этапе возникает упругость, то генерируемая зондом сдвиговая волна может распространяться на большое расстояние. При этом возможно нарушение одного из основных постулатов метода ВВ – условия бесконечности контролируемой среды. Это приводит к неоднозначной связи между вязкостью, упругостью и величиной наблюдаемого сопротивления за счет взаимодействия излучаемых и отраженных от стенки сосуда волн. Трансцендентные уравнения, описывающие этот процесс, имеют неединственное решение, что вызывает трудности при интерпретации результатов вискозиметрических измерений.

В данной работе рассматриваются уравнения, которые позволяют облегчить процедуру разделения корней или могут использоваться самостоятельно для нахождения приближенного решения.

### Математическая постановка

Зонд (пластина), помещенный в исследуемый материал, как показано на рис. 1, совершает периодические колебания. Введем обозначения:  $x_0 e^{i\omega t}$  – вертикальное смещение пластины от положения равновесия;  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $\nu$  – частота колебаний пластины;  $S$  – площадь обеих поверхностей пластины;  $\xi$  – смещение частиц испытуемого материала;  $w$  – скорость частиц испытуемого материала;  $\tau_{xy}$  – создаваемое движущейся пластиной напряжение сдвига;  $Y_0$  – расстояние от пластины до стенки сосуда;  $y$  – координата, перпендикулярная плоскости пластины;  $G$  – модуль сдвиговой упругости;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости;  $\rho$  – плотность испытуемого материала;  $z$  – удельное механическое сопротивление зонда.

В качестве допущения пренебрегаем: градиентами  $G$ ,  $\eta$ , давления и температуры внутри исследуемого материала; краевым эффектом и толщиной пластины; влиянием высших гармоник. Считается, что изменение  $G$  и  $\eta$  в ГОС происходит так медленно, что в любой момент времени выполняются используемые далее уравнения. Полагается, что в процессе опыта  $\nu = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $Y_0 = \text{const}$ ; пластина и сосуд расположены симметрично; энергия, излучаемая пластиной, мала и не влияет на свойства среды.

При малых амплитудах движения, и, соответственно, малых напряжениях сдвига и деформации в испытуемом материале, уравнение движения сплошной среды [2] имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (1)$$

а исследуемый материал описывается моделью вязкоупругой среды:

$$\tau_{xy} = G\gamma + \eta\dot{\gamma}, \quad (2)$$

где  $\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial y}$  – деформация,  $\dot{\gamma} = \frac{\partial w}{\partial y}$  – скорость деформации. Объединяя уравнения (1) и (2), получим:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^2 \partial t}. \quad (3)$$

Делаем замену переменных  $\xi(y, t) = L(y)e^{i\omega t}$  и аналогично [3] вводим комплексную постоянную распространения волны  $\beta = \omega \sqrt{\rho / (G + i\eta\omega)}$ . Тогда уравнение (3) примет вид:

$$-\beta^2 L = \frac{d^2 L}{dy^2}.$$

Используя общее решение этого уравнения  $L = Ae^{-i\beta y} + Be^{i\beta y}$  и определяя коэффициенты  $A$ ,  $B$  из граничных условий  $\xi|_{y=0} = x_0 e^{i\omega t}$  – смещение испытуемого материала равно смещению пластины и  $\xi|_{y=Y_0} = 0$  – на стенке сосуда материал неподвижен, получим:

$$\xi(y, t) = \frac{x_0 e^{i\omega t} (e^{i\beta y - i\beta Y_0} - e^{-i\beta y + i\beta Y_0})}{e^{-i\beta Y_0} - e^{i\beta Y_0}}. \quad (4)$$

Отметим, что уравнение (4) совпадает с решением, полученным в [4], если рассмотреть предельный случай  $Y_0 \rightarrow \infty$ , когда используется бесконечно большой сосуд:

$$\xi(y, t) = x_0 e^{i\omega t - i\beta y}.$$

Удельное механическое сопротивление зонда находится из соотношения:

$$z = \frac{-(F_{упр} + F_{вяз})}{w|_{y=0} S \rho \omega} = \frac{-SG\gamma|_{y=0} - S\eta\dot{\gamma}|_{y=0}}{w|_{y=0} S \rho \omega} = -\frac{i \operatorname{ctg}(\beta Y_0)}{\beta} = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z),$$

где  $F_{упр}$  и  $F_{вяз}$  – упругая и вязкая силы, действующие на зонд. Обозначим:

$$a = \frac{Y_0 \omega \sqrt{\rho}}{G^*} \sqrt{\frac{G^* + G}{2}}; \quad b = \frac{-Y_0 \omega \sqrt{\rho}}{G^*} \sqrt{\frac{G^* - G}{2}}; \quad G^* = \sqrt{G^2 + \omega^2 \eta^2}.$$

Тогда вещественная и мнимая части удельного механического сопротивления примут вид:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{-\sqrt{G^* + G} \operatorname{sh} b \operatorname{ch} b + \sqrt{G^* - G} \cos a \sin a}{\omega \sqrt{2\rho} (\operatorname{ch}^2 b - \cos^2 a)}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{-\sqrt{G^* + G} \sin a \cos a - \sqrt{G^* - G} \operatorname{sh} b \operatorname{ch} b}{\omega \sqrt{2\rho} (\operatorname{ch}^2 b - \cos^2 a)}. \quad (6)$$

В вискозиметрическом эксперименте измеряется только вещественная часть  $\operatorname{Re}(z)$  и, если исследуемая жидкость не обладает упругими свойствами, то уравнение (5) упрощается до известного выражения:

$$\operatorname{Re}(z) = \sqrt{\frac{\eta}{2\omega\rho}}.$$

Если в определенный момент появляется упругость, то, как следует из расчетов, удельное механическое сопротивление ведет себя более сложным образом. При расчетах использовались следующие единицы измерения: грамм, сантиметр, секунда; частота  $\nu$  измерялась в герцах. Остальные размерности параметров являются производными от них:  $G$  – [г/(с<sup>2</sup>·см)],  $\eta$  – [г/(с·см)],  $z$  – [см]. Далее, для краткости, размерности указываться не будут.

На рис. 2 показано  $\operatorname{Re}(z)$ , рассчитанное по формуле (5) для двух значений вязкости и параметров  $\nu = 400$ ;  $Y_0 = 0,3$ ;  $\rho = 1$ ;  $G = 2 \dots 20$ .

Хорошо видны пики, соответствующие механическим резонансам, при этом одному значению сопротивления  $\operatorname{Re}(z)$  может соответствовать несколько значений упругости  $G$  из некоторого диапазона  $\in \mathbf{R}^+$ .

Рассмотрим простейший случай, когда в процессе эксперимента  $\eta = \operatorname{const}$ , а  $G$  определяется. Тогда на основе соотношения (5) получим трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{Re}(z(G_i)) = z_i, \quad (7)$$

где  $G_i$  – искомое значение упругости,  $z_i$  – измеренное значение механического сопротивления. В связи с тем, что уравнение (7) имеет множество решений, возникает проблема разделения корней.

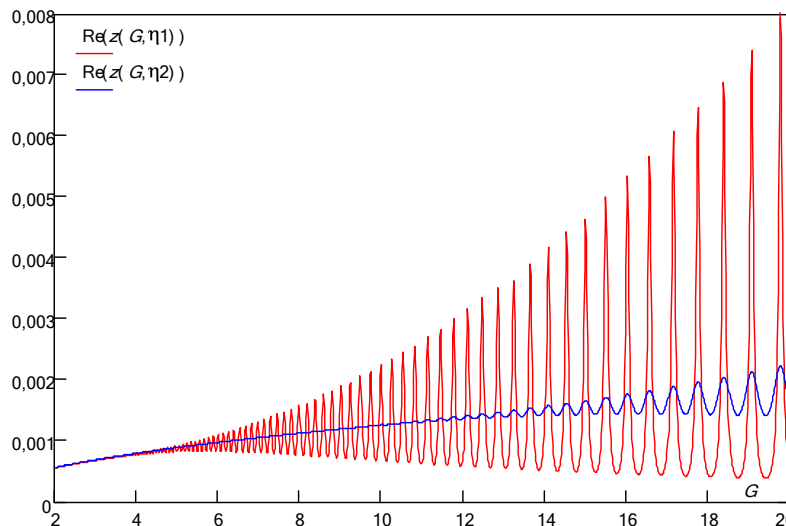


Рис. 2. Вещественная часть механического сопротивления зонда.  $\eta_1 = 0,2 \cdot 10^{-4}$ ;  $\eta_2 = 10^{-4}$

### Получение приближенного решения

При резонансе вещественная часть сопротивления  $\text{Re}(z(G_i)) = z_i$  является локальным максимумом, а мнимая часть сопротивления (6) равна нулю:

$$\frac{\sqrt{G^* + G} \sin a \cos a + \sqrt{G^* - G} \text{sh} b \text{ch} b}{\omega \sqrt{2\rho} (\text{ch}^2 b - \cos^2 a)} = 0. \tag{8}$$

Обозначая  $f_1 = \sin(a) \cos(a)$ ,  $f_2 = \frac{\omega \eta \text{sh}(b) \text{ch}(b)}{G^* + G}$  и учитывая, что в формуле (8) числитель равен нулю, получим:

$$f_1 + f_2 = 0. \tag{9}$$

На рис. 3 показан вид функций  $\text{Im}(z)$ ,  $f_1$  и  $f_2$  при  $G = 3 \dots 5$ . Первое слагаемое в (9) является периодическим и изменяется в диапазоне  $[-0,5; 0,5]$ . Второе слагаемое ограничено сверху нулем, является монотонным и уже при небольших значениях  $G$  становится на порядок меньше первого. Поэтому, начиная с некоторого значения  $G$ , хорошим приближением уравнения (9) можно считать  $\sin(a) \cos(a) = 0$ , причем, как видно на рис. 4, положению минимумов  $\text{Re}(z)$  соответствует  $\cos(a) = 0$ , а положению максимумов соответствует  $\sin(a) = 0$ . Будем искать нули функции  $\sin(a) = 0$ . Эта формула в развернутом виде:

$$\sin\left(\frac{Y_0 \omega \sqrt{\rho}}{G^*} \sqrt{\frac{G^* + G}{2}}\right) = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (10) можно найти приближенное решение. Кроме того, из него следует алгебраическое уравнение 4 порядка относительно  $G$ :

$$G^2 + \omega^2 \eta^2 = \left[ \frac{2\pi^2 n^2}{Y_0^2 \omega^2 \rho} (G^2 + \omega^2 \eta^2) - G \right]^2, \tag{11}$$

где значения  $n = 1, 2, 3 \dots \in \mathbf{I}$  соответствуют подряд идущим максимумам. Это уравнение имеет единственное решение для каждого значения  $n$ .

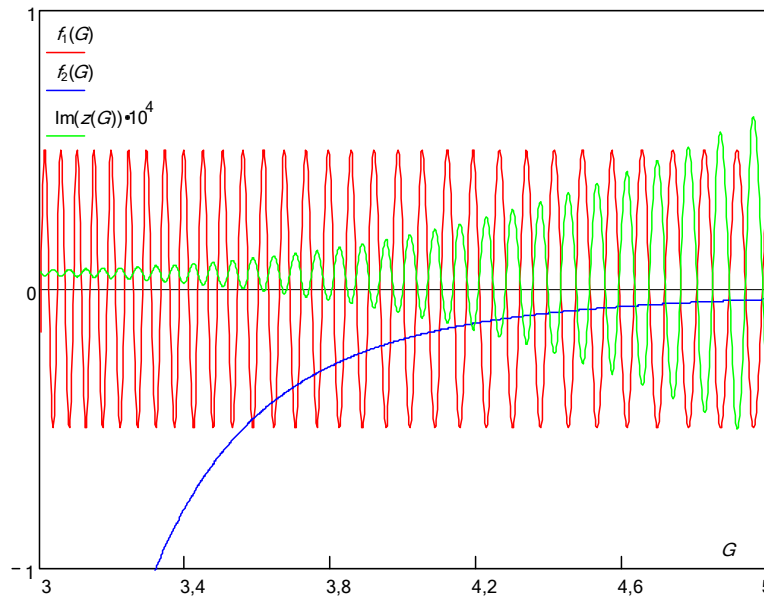


Рис. 3. Поведение функций при  $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ ;  $\nu = 400$ ;  $Y_0 = 0,3$ ;  $\rho = 1$

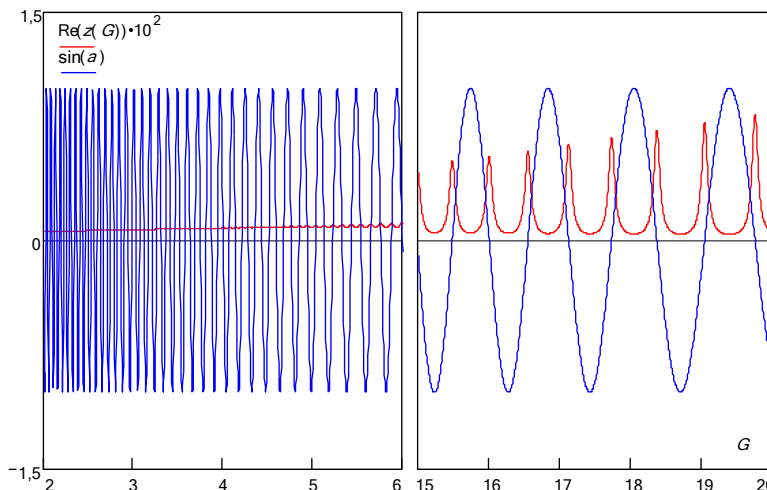


Рис. 4. Положение нулей функции  $\sin(a)$  и максимумов  $\text{Re}(z)$  при  $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ ;  $\nu = 400$ ;  $Y_0 = 0,3$ ;  $\rho = 1$

Если в уравнении (11) положить  $\eta = 0$ , то получится еще одно приближенное уравнение:

$$G = \frac{Y_0^2 \omega^2 \rho}{\pi^2 n^2}. \tag{12}$$

Перебор параметра  $n = 1, 2, 3, \dots$  дает при подстановке в уравнение (12) значения  $G_1, G_2, G_3, \dots$ , из которых можно выбрать те, которые лежат внутри нужного диапазона.

Таким образом, вместо точного трансцендентного уравнения (8) получено приближенное уравнение (10) или его алгебраический аналог (11), а также уравнение (12). Их можно использовать для нахождения положения локальных максимумов  $\text{Re}(z)$ , а совместное решение уравнений (7) и (8) позволяет найти  $\eta$  и  $G$  в этих точках.

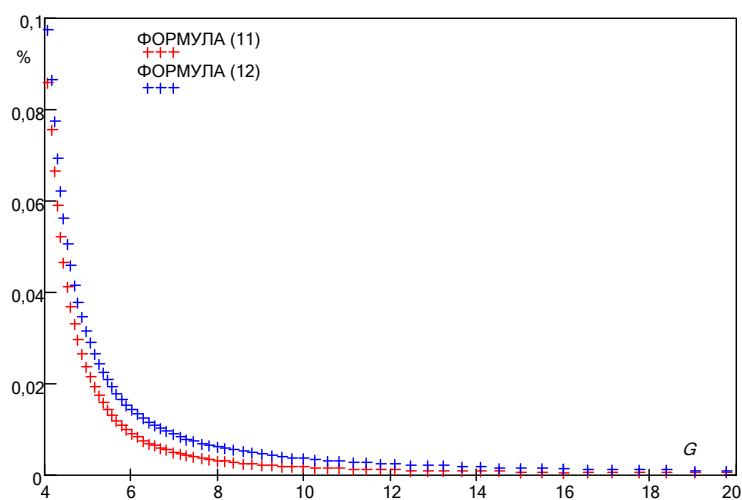
### Численные результаты

При сравнении результатов вычислений по точной формуле (8) и приближенным формулам (11), (12) ограничимся параметрами  $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ ;  $\nu = 400$ ;  $Y_0 = 0,3$ ;  $\rho = 1$ . Из рис. 3 следует,

что минимальное значение  $G$ , при котором  $\text{Im}(z) = 0$ , приблизительно равно 3,6. Поэтому будем рассматривать диапазон  $G \in [4; 20]$ .

Перебором числа  $n$  в уравнении (12) легко определить, что диапазону  $G \in [4; 20]$  соответствует  $n \in [54; 119]$ , причем верхняя (нижняя) граница  $n$  соответствует нижней (верхней) границе  $G$ . Принципиальная разница между точным и приближенным решением заключается в том, что уравнение (8) имеет множество решений в диапазоне  $G \in [4; 20]$ , а уравнения (11) и (12) имеют единственное решение для каждого  $n \in [54; 119]$  в указанном диапазоне. Поэтому при решении уравнения (11), например, методом половинного сечения, в качестве интервала локализации корня можно указывать  $\min(G)$  и  $\max(G)$  для всех указанных значений  $n$ . Также можно решать уравнение (11) с использованием безытерационного алгоритма [5].

На рис. 5 приведено сравнение результатов вычислений значения  $G$  для каждого из локальных максимумов  $\text{Re}(z)$  по точной и приближенным формулам. Использовался метод половинного деления, максимальная ошибка расчетов  $10^{-10}$ . Полученные результаты показывают точность, приемлемую для обработки экспериментальных данных.



**Рис. 5.** Относительная разница в % между точными корнями из (8) и приближенными из формул (11), (12). Каждый символ «+» соответствует локальному максимуму  $\text{Re}(z)$

### Заключение

Предложены алгебраические уравнения, которые с достаточной точностью могут быть использованы при интерпретации результатов вискозиметрических измерений динамики гелеобразования. Они же могут быть использованы для разделения корней при численном решении точного трансцендентного уравнения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богословский А.В., Журавлева Т.Б., Стрелец Л.А. Интерференционные резонансы при вискозиметрических измерениях // Теоретические и прикладные основы физико-химического регулирования свойств нефтяных дисперсных систем. – Томск, Изд-во ТГУ, 2001. – С. 105–109.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 788 с.
3. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: ИЛ, 1963. – 535 с.
4. Браилов Э.С., Школьник С.И. Исследование кинетики и контроль процесса вулканизации полиэфиретанового каучука вибрационным методом // Каучук и резина. – 1968. – № 8. – С. 17–19.
5. Несмеев Ю.А. Об одном подходе к решению алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – № 1 (13). – С. 26–30.

Поступила 24.01.2013 г.