Воронин Александр Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики ТПУ.
E-mail: 3ene4ka@sibmail.com
Сфера научных интересов: теория автоматического управления, моделирование систем, исследование систем управления автономными объектами.
Щелканова Татьяна Алексеевна, магистрант кафедры интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики ТПУ.
E-mail: 3ene4ka@sibmail.com
Сфера научных интересов: теория автоматического управления, исследование систем управления для неустойчивых и нейтральных объектов.

УДК 681.515:519.85

ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ

А.В. Воронин, Т.А. Щелканова

Томский политехнический университет
E-mail: 3ene4ka@sibmail.com

Показано использование метода квадратичного программирования для расширения возможностей методов синтеза регуляторов пониженного порядка, в частности при применении процедуры аппроксимации.

Ключевые слова:
Аппроксимация, регулятор, объект управления, передаточная функция, вещественный интерполяционный метод, квадратичное программирование.

Введение

Возрастание сложности управляемых объектов, как правило, приводит к увеличению сложности регуляторов. При этом известно, что удовлетворительное качество регулирования часто можно получить при использовании достаточно простых регуляторов – не выше второго порядка. Традиционно считается, что простые регуляторы предпочтительнее сложных, т. к. их легче реализовать, они проще в понимании и настройке, менее требовательны к вычислительным ресурсам. И хотя часть из перечисленных проблем сложных регуляторов постепенно снимается при переходе к цифровым реализациям, проблема создания регуляторов пониженного порядка продолжает оставаться актуальной и привлекающей внимание исследователей

Множество разработанных подходов к построению регуляторов пониженного порядка можно разделить на две группы. В первом случае регулятор изначально проектируется в рамках упрощенной структуры. Его порядок с самого начала существенно ниже порядка объекта. Таковы, например, все методы построения ПИД-регуляторов. Иногда такой процесс называют настройкой регулятора. При этом в большинстве случае можно обойтись достаточно грубой моделью либо работать непосредственно с объектом.

Во втором подходе сначала рассчитывается полный регулятор. Затем его порядок понижается до заданного или минимально возможного, без существенной потери основных свойств замкнутой системы. Такой процесс часто называют синтезом регулятора пониженного порядка. Для реализации этого подхода нужна детализированная модель и хорошая формализация цели управления. Эффективность всей процедуры зависит как от эффективности построения полного регулятора, так и от эффективности процедуры понижения порядка.

Полными называют регуляторы, изменяемых параметров которых достаточно для произвольного размещения всех полюсов замкнутой системы [1]. Кроме расположения полюсов для полных регуляторов, дополнительно могут задаваться требования к статической точности, грубости, учету возмущающих воздействий либо иным характеристикам замкнутой системы. Наиболее эффективным методом синтеза полных регуляторов является модальный метод в форме синтеза в пространстве состояний [2] или полиномиального синтеза [1].

Для понижения порядка регулятора известны различные подходы. В частности, эта процедура может быть реализована на основе так называемого вещественного интерполяционного метода [3], когда в качестве модели системы рассматривается численная характеристика системы.

Аппроксимация на основе вещественного интерполяционного метода

Вещественный интерполяционный метод (ВИМ) синтеза регуляторов [3] относится к группе операторных методов, отличаясь от классических подходов видом прямого интегрального преобразования. Метод использует вещественное преобразование, заключающееся в переходе от оригинала $f(t)$ к функции-изображению $F(\delta)$, имеющей вещественную переменную δ.

Формула для получения вещественного изображения $F(\delta)$ следует непосредственно из формулы преобразования Лапласа при замене комплексной переменной s на вещественную переменную δ:

$$F(\delta)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-\delta t}dt,\ \delta\in[0,\infty). \tag{1}$$

На функцию $f(t)$ накладываются естественные ограничения: она должна быть непрерывной, равной нулю для всех значений t, меньших либо равных нулю, и должна быть абсолютно интегрируема:

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt<\infty.$$

Особенностью ВИМ является то, что изображение функции $f(t)$ может быть получено как в аналитической форме, простой заменой в соответствующей формуле Лапласа комплексной переменной s на вещественную переменную δ, так и в виде графика $F(\delta)$ и набора отсчетов $F(\delta_i)$, называемого численной характеристикой (ЧХ). Предполагается, что численная характеристика несет полную информацию об исходной модели и потому возможен однозначный переход к непрерывной форме $F(\delta)$. Операции в области изображений могут выполняться как с аналитическими зависимостями, так и с численными характеристиками. Применительно к понижению порядка использование модели в форме ЧХ позволяет сравнительно просто реализовать вычислительные аспекты этой процедуры.

Решение задачи понижения порядка регулятора с привлечением ВИМ базируется на приближенном равенстве численной характеристики полного регулятора $W_{\text{ï ðåã}}(\delta)$ и численной характеристики упрощенного регулятора $W_{\text{óðåã}}(\delta)$:

$$\{W_{\text{ï ðåã}}(\delta_i)\}=\{W_{\text{óðåã}}(\delta_i)\},\ i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где n – число точек численной характеристики, или, по терминологии [3], узлов интерполирования.

Сама же процедура аппроксимации заключается в выполнении таких операций, как перевод передаточной функции $W_{\text{ï ðåã}}(s)$ в форму $W_{\text{ï ðåã}}(\delta)$ в соответствии с (1), выбор порядков и структуры полиномов аппроксимирующего выражения, а также размерности численной характеристики, определение значений узлов интерполирования, вычисление элементов $W_{\text{ï ðåã}}(\delta)$ численной характеристики исходной передаточной функции, формирование и решение системы уравнений вида (2) относительно неизвестных параметров аппроксимирующего выражения, переход от вещественной интерполяционной формы передаточной функции аппроксимирующего выражения к её лапласову эквиваленту.

Ключевую роль в этой процедуре играет получаемое приближение численных характеристик, на качество которого можно повлиять выбором узлов интерполирования и принципа приближения, а также введением ограничений на коэффициенты $W_{\text{ó ðåã}}(s)$.

Обычно число узлов интерполирования n выбирается так, чтобы можно было сформировать и решить квадратную систему алгебраических уравнений относительно искомых параметров регулятора [2, 3]. Представляется полезным использовать значительно большее число точек, ориентируясь не на точное решение системы алгебраических уравнений, а на аппроксимирующее приближение.

Отсутствие ограничений на коэффициенты $W_{\text{ó ðåã}}(s)$ часто приводит к получению неустойчивых или негрубых замкнутых систем. Известно, что максимальная грубость системы достигается при использовании минимально-фазовых регуляторов. Особенно это важно для неустойчивых объектов, т. к. исключает возможность сокращения положительных нулей и полюсов регулятора и объекта, что является обязательным условием работоспособности полученной замкнутой системы. Для синтеза минимально-фазового регулятора 2-го порядка достаточно наложить условия положительности всех его коэффициентов. Все отмеченные задачи могут быть решены с использованием процедуры квадратичного программирования, которая имеет хорошо разработанную алгоритмическую и программную поддержку, в частности в среде Matlab.

Постановка и решение задачи аппроксимации на основе ВИМ как задачи квадратичного программирования

Задача квадратичного программирования в рамках программы QUADPROG раздела Optimization Toolbox Matlab ставится как задача расчета вектора значений переменных x при условиях

$$\frac{1}{2}x^T H\,x + f^T x \to \inf\,,$$
$$A\,x \le b,$$
$$Aeg \cdot x = beg,$$
$$lb \le x \le ub\,,$$

где H и h – весовая матрица и весовой вектор, соответственно; A – матрица ограничений-неравенств; Aeg – матрица ограничений равенств; lb и ub – векторы ограничений x сверху и снизу.

Пусть численная характеристика передаточной функции полного регулятора задана в виде n отсчетов p_i в узлах δ_i интерполирования. Регулятор пониженного порядка рассчитывается в виде

$$W_{\text{ðåã}}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}\,.$$

Задача синтеза минимально-фазового регулятора может быть сформулирована как задача квадратичного программирования следующим образом. Требуется минимизировать функционал $J(x) = e^T H\,e$ при условиях

$$b_2\delta_1^2 + b_1\delta_1 + b_0 - p_1\delta_1^2 a_2 - p_1\delta_1 a_1 + e_1 = p_1\,,$$
$$\ldots$$
$$b_2\delta_n^2 + b_1\delta_n + b_0 - p_n\delta_n^2 a_2 - p_n\delta_n a_1 + e_n = p_n\,,$$
$$b_2 \ge 0\,,$$
$$b_1 \ge 0\,,$$
$$b_0 \ge 0\,,$$
$$a_2 \ge 0\,,$$
$$a_1 \ge 0\,.$$

Вектор e представляет собой невязки приближенного решения системы линейных уравнений в узлах интерполирования. Общий вектор неизвестных x включает параметры регулятора b_2, b_1, b_0, a_2, a_1 и составляющие вектора невязок e. При этом ограничения накладываются только на b_2, b_1, b_0, a_2, a_1.

Применим предложенный подход для системы управления неустойчивым объектом. В [4] был рассмотрен синтез компенсационного регулятора для объекта вида

$$W(s) = \frac{16}{s^2 - 16},$$

обеспечивающего замкнутой системе заданное качество и статическую точность. В результате был синтезирован полный регулятор

$$W_{ðåã}(s) = \frac{34.1s^2 + 290s + 694}{s^2 + 40s + 69.4}, \qquad (3)$$

порядок которого равен порядку объекта.

Данный регулятор рассчитан из условия обеспечения положительной статической ошибки $e_{г} = 0.1y_{г}$ в замкнутой системе. Подобным же образом можно получить регулятор для отрицательной статической ошибки $e_{г} = -0.1y_{г}$. Этот регулятор получается неминимально-фазовым. Его передаточная функция имеет вид:

$$W_{ðåã}(s) = \frac{42.4s^2 + 290s + 562.5}{s^2 + 40s - 62.5}. \qquad (4)$$

Графики переходных функций замкнутой системы для двух вариантов регуляторов представлены на рис. 1.

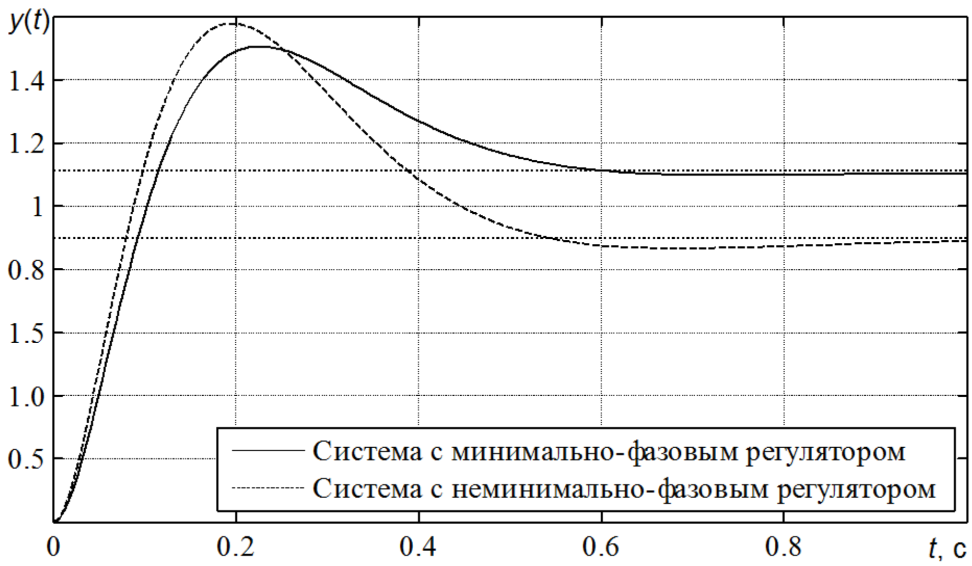

Рис. 1. Графики переходных функций

Рассмотрим возможность понижения порядка регуляторов (3, 4) методом аппроксимации на основе ВИМ с использованием процедуры квадратичного программирования. Будем считать, что кроме сохранения качества переходного процесса в замкнутой системе требуется сохранить величину и знак статической ошибки.

Начнем с минимально-фазового регулятора (3). Регулятор пониженного порядка будем синтезировать в виде

$$W_{ðåã}(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + 1}.$$

Узлы интерполирования выберем в интервале существенных изменений численной характеристики. Учитывая, что ЧХ при возрастании δ меняется в пределах от 10 до 34,1, верхнюю границу δ определим из соотношения

$$W_{\text{ðåã}}(\delta_\eta) = 0.9 \cdot W_{\text{ðåã}}(\delta_\infty),$$

или

$$\frac{34.1\delta_\eta^{\ 2} + 290\delta_\eta + 694}{\delta_\eta^{\ 2} + 40\delta_\eta + 69.4} = 30.7.$$

Решение данного уравнения в ППП Mathcad дает $\delta_\eta = 277$. Таким образом, ЧХ существенно меняется на интервале от 0 до 277. Примем максимальное значение параметра δ равным 280.

Для вычисления трех неизвестных коэффициентов b_0, b_1, a_1 используем 6 узлов аппроксимации δ_i. Статическую точность замкнутой системы обеспечим за счет размещения первого узла в точке $\delta_1 = 0$, что сразу дает $b_0 = 10$. Остальные узлы равномерно распределим по интервалу 0…280. Кроме того, потребуем положительности всех коэффициентов регулятора пониженного порядка, что обеспечит его минимально-фазовость.

В результате решения задачи квадратичного программирования с использованием программы QUADPROG раздела Optimization Toolbox Matlab получен регулятор вида

$$W_{\text{ðåã}}(s) = \frac{0.69s + 10}{0.02s + 1}.$$

Графики ЧХ синтезированного и исходного регуляторов приведены на рис. 2. Видно, что полученное решение обеспечивает практически полное совпадение численных характеристик полного и упрощенного регуляторов, особенно в области малых значений δ.

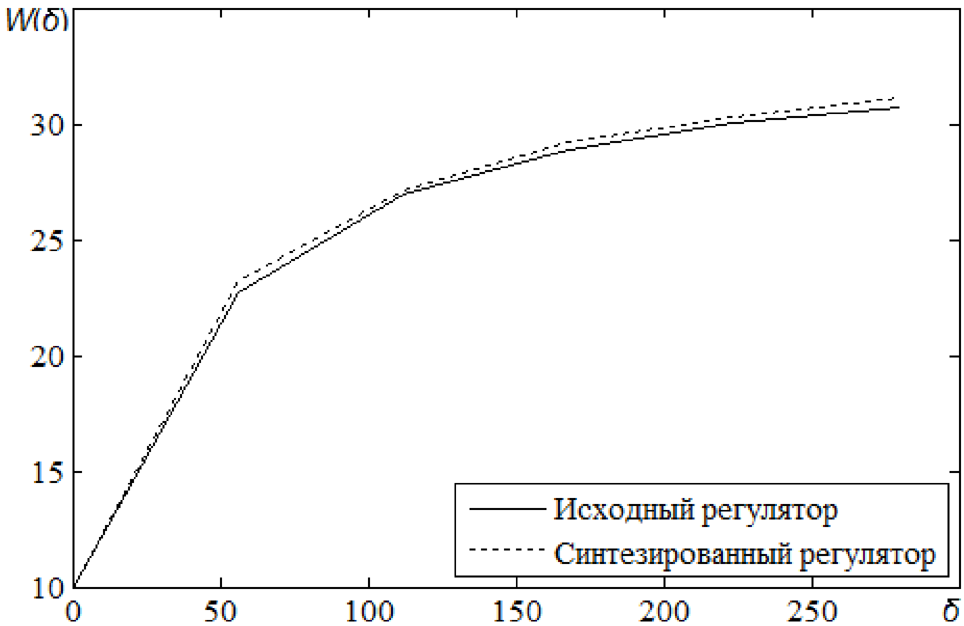

Рис. 2. Численные характеристики синтезированного и исходного минимально-фазового регуляторов

Из графиков переходных процессов, приведенных на рис. 3, видно, что полученный регулятор пониженного порядка обеспечил устойчивость замкнутой системы при том же уровне статической ошибки, что и с исходным регулятором. Однако качество переходного процесса, в частности колебательность и перерегулирование, оказались существенно другими.

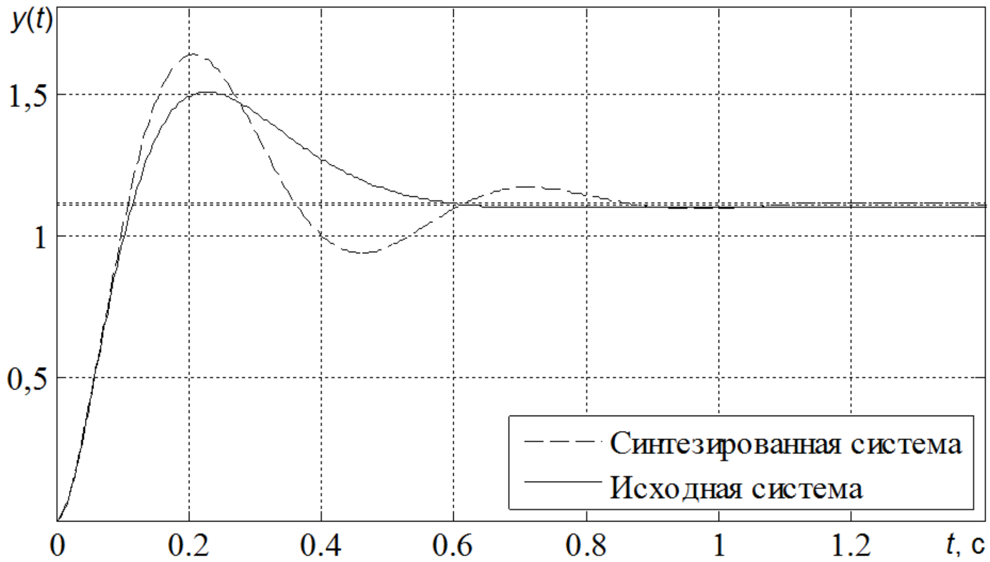

Рис. 3. Переходные процессы в синтезированной и исходной системах

Известно [3], что качество процесса может быть улучшено за счет более качественной аппроксимации конечной части численной характеристики. Достичь этого можно либо изменением коэффициентов весовой матрицы H для больших значений δ, либо за счет сдвига узлов интерполирования от нулевой точки.

Первый вариант повышения точности практически не привел к существенным изменениям характера переходной функции.

Второй вариант оказался продуктивнее. В результате экспериментов со сдвигом первого узла в точки $\delta_1 = 2, \delta_1 = 5$, $\delta_1 = 10$ получены регуляторы:

$$W_{\text{ðåã}}(\delta_\eta) = \frac{0.79s + 8.0}{0.023s + 1}. \tag{5}$$

$$W_{\text{ðåã}}(\delta_\eta) = \frac{0.83s + 7.23}{0.0244s + 1}. \tag{6}$$

$$W_{\text{ðåã}}(\delta_\eta) = \frac{0.86s + 6.81}{0.025s + 1}. \tag{7}$$

Результаты моделирования замкнутой системы при различных регуляторах пониженного порядка, приведенные на рис. 4, показывают, что сдвиг первого узла позволяет повысить точность аппроксимации переходной функции, однако меняет статическую точность замкнутой системы.

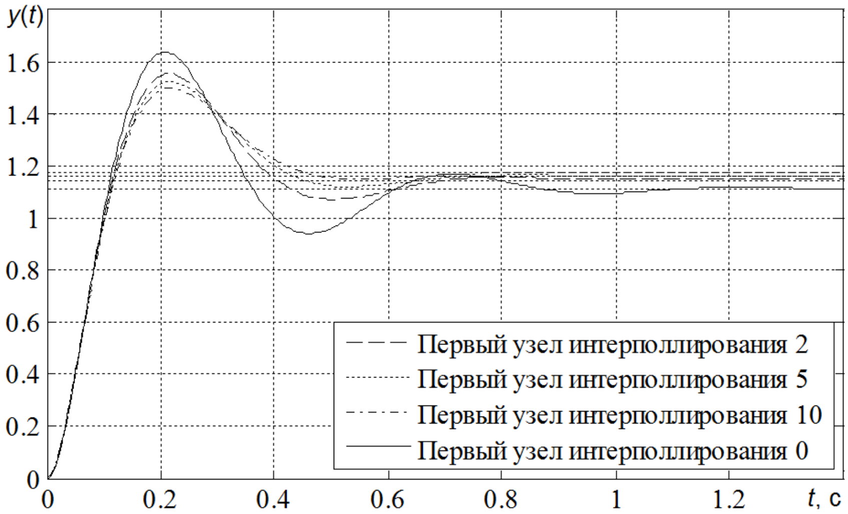

Рис. 4. Переходные процессы в системах с регуляторами, полученными при разном выборе узлов интерполирования

Таким образом, как и можно было ожидать, при понижении порядка за счет выбора узлов интерполирования есть возможность выбирать между сохранением качества переходного процесса и сохранением желаемой статической ошибки.

Рассмотрим возможность понижения порядка неминимально-фазового регулятора

$$W_{\text{påã}}(s)=\frac{42.4s^2+290s+532.5}{s^2+40s-62.5}$$

при тех же требованиях к качеству переходных процессов и сохранению статической ошибки в замкнутой системе.

Проведенные эксперименты показали, что не представляется возможным в рамках регулятора первого порядка обеспечить отрицательность статической ошибки и устойчивость замкнутой системы.

Если не налагать ограничений на коэффициенты регулятора пониженного порядка, а потребовать только отрицательности статической ошибки, то при очень хорошем совпадении численных характеристик (рис. 5) полученный регулятор

$$W_{\text{påã}}(s)=\frac{1.92s-8.61}{0.046s+1}$$

не обеспечивает устойчивости замкнутой системы.

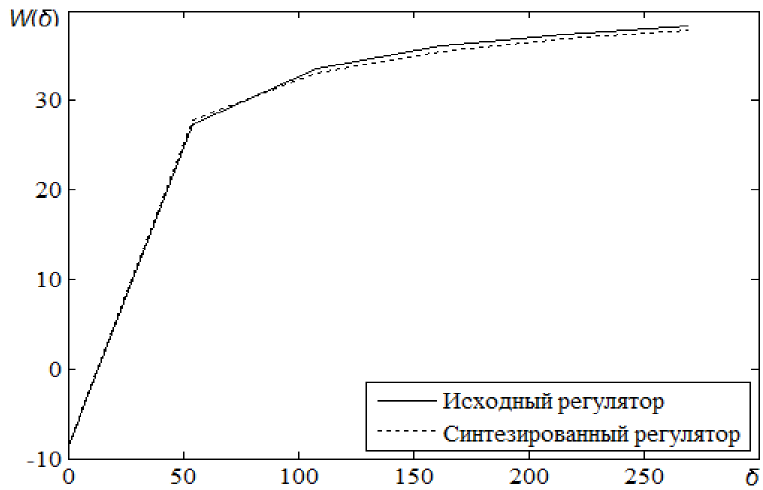

Рис. 5. Численные характеристики синтезированного и исходного неминимально-фазового регулятора

Этот регулятор имеет правый нуль близкий к правому полюсу объекта, т. е. реализует простейшую идею компенсации правым нулем регулятора правого полюса объекта, которая, как известно, неработоспособна для неустойчивых объектов.

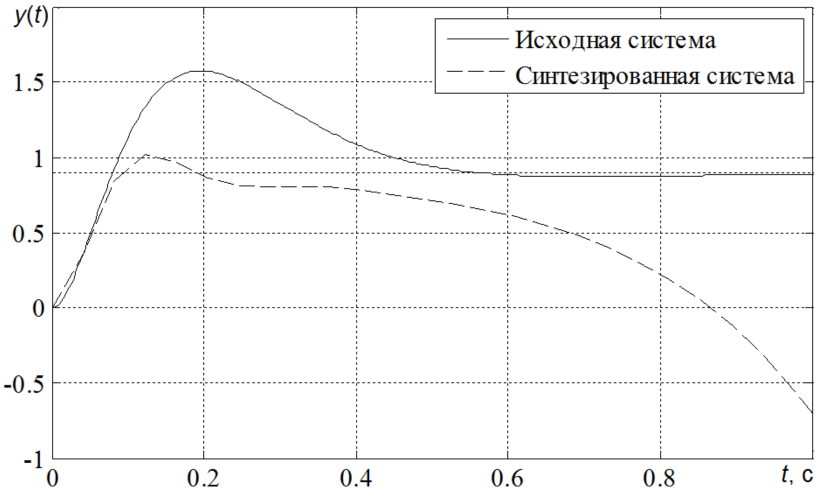

Рис. 6. Переходные процессы в синтезированной и исходной системах

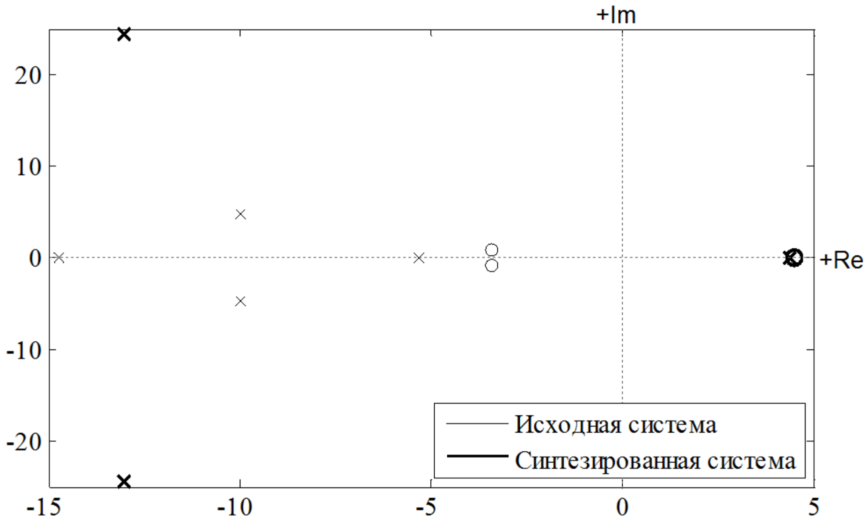

Рис. 7. Расположение нулей и полюсов в синтезированной и исходной системах

Таким образом, без введения условий положительности коэффициентов регулятора пониженного порядка не удалось получить работоспособную систему.

Только при требованиях положительности всех коэффициентов редуцированного регулятора, т. е. только для минимально-фазового регулятора пониженного порядка, в сочетании с отказом от отрицательности статической ошибки регулирования за счет сдвига первого узла интерполирования в точку $\delta_1 = 10$ был получен регулятор

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{0.83s + 12.6}{0.02s + 1}, \tag{8}$$

обеспечивающий устойчивость замкнутой системы и удовлетворительное качество переходных процессов. Как видно, регулятор (8) мало отличается от регуляторов (5–7), полученных при редукции минимально-фазового полного регулятора.

Из приведенных на рис. 8 графиков видно, что статическая ошибка в замкнутой системе с регулятором (8) имеет положительный знак.

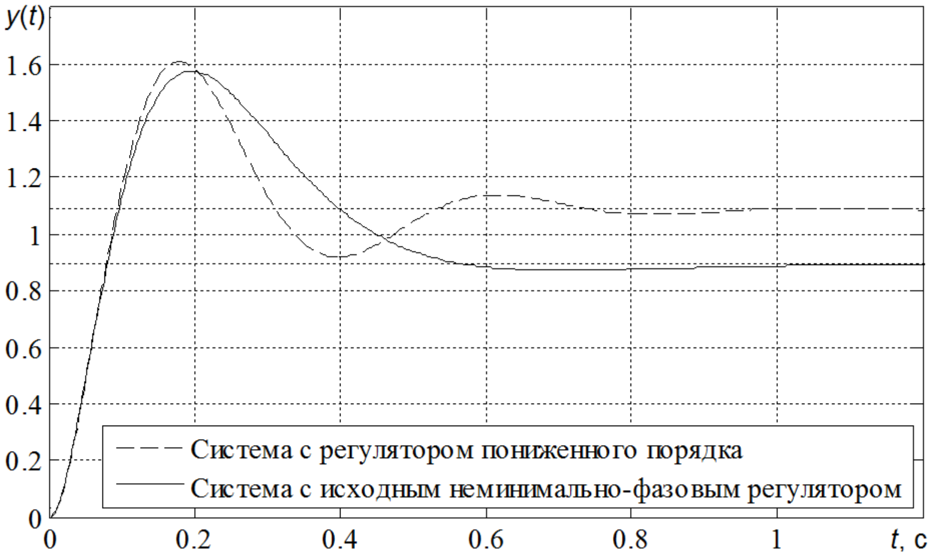

Рис. 8. Переходные процессы в исходной и синтезированной системе

В целом процедура редуцирования неминимально-фазового регулятора является существенно более неоднозначной, чем минимально-фазового. В данном случае, возможно по причине низкого порядка регулятора, не удалось сохранить его минимально-фазовость и, соответственно, знак статической ошибки. Задача приближения качества переходного процесса была решена за счет пренебрежения начальным участком численной характеристики исходного регулятора.

Выводы

В представленной работе исследована возможность использования вещественного интерполяционного метода в сочетании с инструментами квадратичного программирования для решения задачи понижения порядка регулятора. Показана возможность синтеза минимально-фазового регулятора пониженного порядка путем аппроксимации структурно более сложного минимально-фазового регулятора с сохранением статической ошибки регулирования. Для неминимально-фазовых регуляторов требуются дополнительные исследования.

Полученные результаты позволяют рекомендовать вещественный интерполяционный метод в сочетании со средствами квадратичного программирования в среде Mathlab для решения задачи понижения порядка регуляторов линейных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким Д.П. Синтез неминимально-фазовых систем управления с заданным временем регулирования // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 4. – С. 5–10.
2. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970. – 704 с.
3. Алексеев А.С. и др. Вещественный интерполяционный метод в задачах автоматического управления / А.С. Алексеев, А.А. Антропов, В.И. Гончаров, С.В. Замятин, В.А. Рудницкий. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 217 с.
4. Воронин А.В., Щелканова Т.А. Синтез регуляторов заданной точности для неминимально-фазовых объектов // Проблемы информатики. – 2012. – № 5. – С. 151–157.

Поступила 22.11.2013 г.