

УДК 504.4.054:519.6

**Перминов Валерий Афанасьевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры экологии и безопасности жизнедеятельности Института неразрушающего контроля ТПУ. E-mail: perminov@tpu.ru  
Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов, в том числе процессов, связанных с ЧС (лесные пожары, загрязнение окружающей среды и т. д.).

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

В.А. Перминов

Томский политехнический университет

E-mail: perminov@tpu.ru

Реки являются основным источником водоснабжения. В настоящее время еще недостаточно эффективны способы очистки воды, особенно в случаях аварийных залповых выбросов различных веществ. Поэтому представляют интерес методы оценки состояния водной среды, с помощью которых осуществляется описание распространения загрязняющих примесей в водоемах. В данной работе представлена математическая модель процесса тепло- и массопереноса, расчета полей скорости, температуры и концентраций загрязняющих компонент в водоеме. Разработанные методы предсказания уровней распределения загрязняющих примесей, попадающих в водную

среду, могут быть использованы для контроля качества речной воды, в том числе при условии аварийных выбросов различных веществ в водоем.

### Ключевые слова:

Математическая модель, река, загрязняющая примесь, дискретный аналог, контрольный объем.

### Введение

В водоем загрязняющие вещества могут поступать с территории водосбора, со сточными водами, а также в результате аварийных залповых выбросов. Загрязняющие вещества могут либо растворяться в воде и затем распространяться вниз по течению, либо переноситься в виде взвешенных частиц под действием течения реки. При этом последние в некоторых случаях могут оседать на дно реки, а затем подниматься, например при неблагоприятных метеоусловиях, когда изменяются характеристики течения.

В результате анализа существующих моделей загрязнения водной среды [1–5] в рамках механики сплошных сред построена математическая модель, основанная на решении уравнений для турбулентной диффузии. При этом учитывается конфигурация и глубина реки, скорость течения, температура окружающей среды, параметры источников выбросов (координаты, динамика и состав выбросов). При данном подходе имеется возможность для включения дополнительных факторов, которые необходимо учитывать при расчете загрязнения окружающей среды. С использованием законов механики сплошных сред [6] поставлена краевая задача для описания тепло-массопереноса загрязняющих веществ в водоеме.

### Постановка задачи

Характерные размеры водоема в горизонтальных направлениях превышают вертикальные, т. е. глубину водоема. Из априорных данных следует, что зависимости проекций скорости, температуры, концентраций компонентов от координаты  $x_3$ , отсчитываемой от поверхности дна реки, слабее, чем от координат  $x_1$  и  $x_2$ . На основе вышеизложенного можно усреднить исходные характеристики по глубине водоема согласно [7]:

$$\int_{-h}^0 \phi dx_3 = \bar{\phi} h,$$

где  $\bar{\phi}$  – среднее значение величины  $\phi$ .

Рассмотрим плоскую задачу конвективного тепло- и массопереноса загрязняющих веществ в водоеме. Источник загрязнения моделируется поверхностным источником массы нагретых веществ, выделяющихся в результате залпового выброса в течение некоторого времени. Считается, что течение направлено слева направо и носит развитый турбулентный характер, а для описания конвективного переноса под воздействием течения реки используются двумерные уравнения Рейнольдса для турбулентного течения. Начало координат  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  расположено в левой части рассматриваемой области, оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  расположены в плоскости земной поверхности (рис. 1).



Рис. 1. Схема расчетной области

Сформулированная задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) + \frac{\rho w_0}{h} &= 0, \quad j=1,2, \quad i=1,2; \\ \rho \frac{dv_i}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) - \frac{\rho v_i w_0}{h} - \rho g_i; \\ \rho c_p \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}) - \frac{\rho w_0 c_p T_0}{h}; \\ \rho \frac{dc_\alpha}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho D \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j}) - \frac{\rho c_\alpha w_0}{h}, \quad \alpha=1,2; \\ v &= (v_1, v_2), \quad \vec{g} = (0, g). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

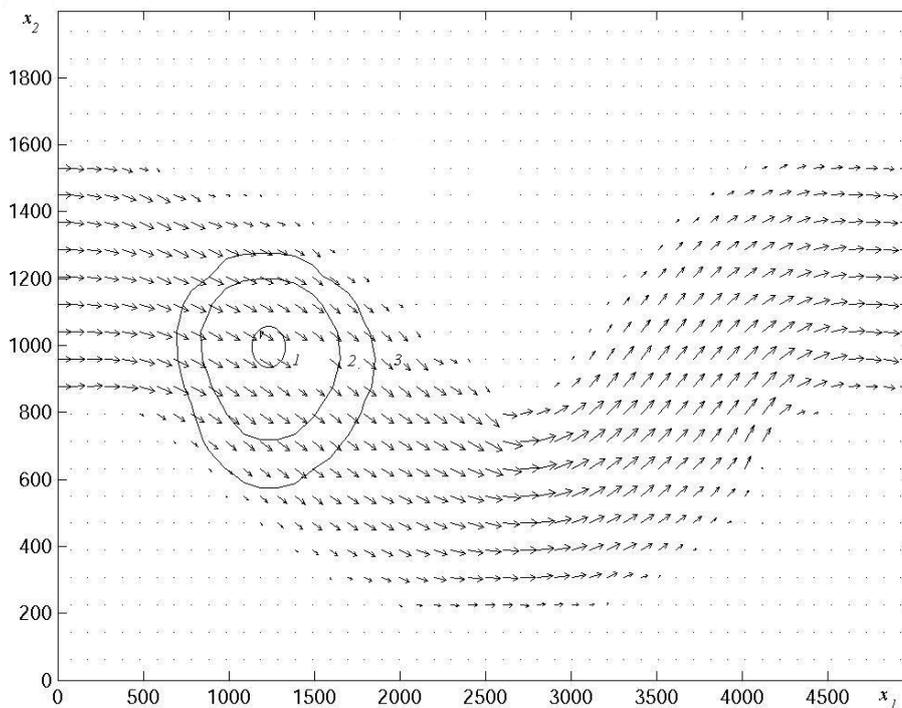
$$\begin{aligned} t=0: v_1 &= 0, v_2 = 0, T = T_e, c_\alpha = c_{ae}, T_s = T_e; \\ x_1=0: v_1 &= V_e, v_2 = 0, T = T_e, c_\alpha = c_{ae}; \\ x_1=x_{1e}: \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \\ x_2=-x_{2e}: \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0; \\ x_2=x_{2e}: \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\frac{d}{dt}$  – полная производная ( $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_j + w_p) \frac{\partial}{\partial x_j}$ );  $c_p$  – удельная теплоемкость воды при постоянном давлении;  $\rho$  – плотность воды;  $T$  – температура воды;  $c_\alpha$  – массовые кон-

центрации ( $\alpha = 1$  – загрязняющая жидкость; 2 – загрязняющие частицы);  $P$  – давление;  $M_\alpha$  – молекулярная масса индивидуальных компонентов;  $\lambda, \mu, D$  – коэффициенты теплопроводности, динамической вязкости и диффузии;  $t$  – время;  $x_i, v_i (i = 1, 2)$  – декартовы координаты и компоненты скорости;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $w_p$  – скорость оседания твердых загрязняющих частиц ( $w_p \neq 0$  в уравнении (1) при  $j = 2$  для частиц, а в остальных случаях  $w_p = 0$ ).

### Численное моделирование и результаты расчетов

Для расчета поля течения применяется алгоритм SIMPLE [8]. Построение дискретного аналога для поставленной краевой задачи осуществлялось на основе метода контрольного объема [8]. Полученные в результате дискретизации системы сеточных уравнений разрешались с использованием метода SIP [8]. Правильность работы программы была проверена с помощью метода введения аналитических решений. Для задания конфигурации реки использовался метод фиктивных областей, т. е. в контрольных объемах расчетной области, вне реки, были заданы и не менялись в процессе расчетов начальные значения функций, а компоненты скорости задавались равными нулю. В данных расчетах результаты получены при следующих значениях:  $T_e = 300$  К,  $V_e = 2$  м/с.

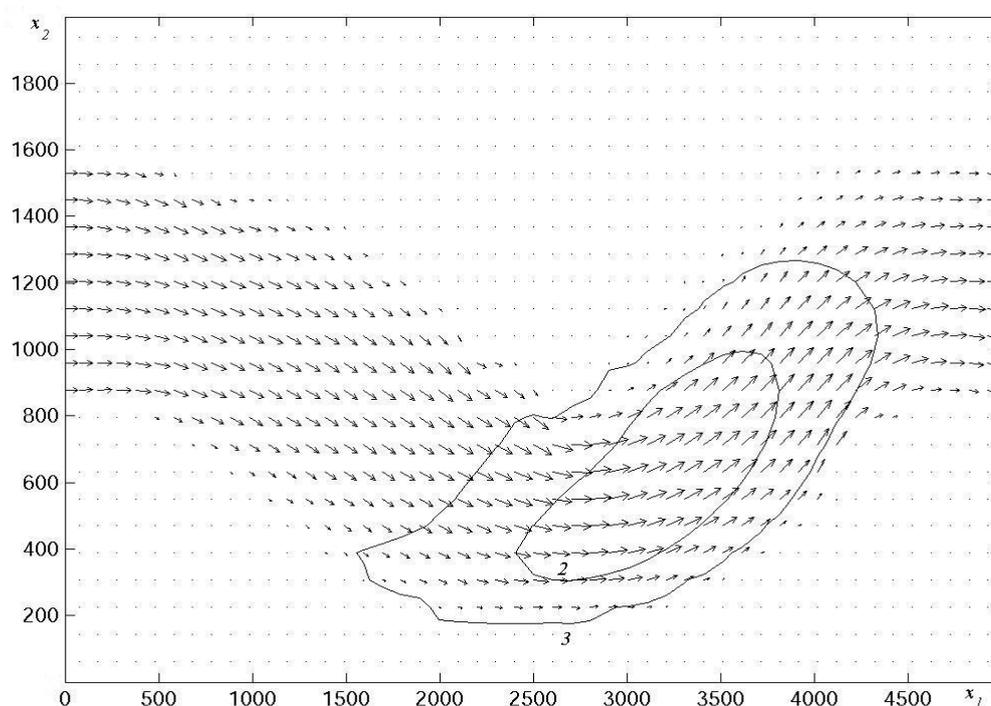


**Рис. 2.** Векторное поле скорости и распределение концентрации: 1 – 0,1; 2 – 0,01; 3 – 0,001;  $t = 6$  мин

В результате численных расчетов получены распределения скорости, температуры, концентраций компонент загрязняющих примесей в различные моменты времени. На рис. 2 представлены векторное поле течения и распределение концентрации загрязняющей примеси попавшей в водоем в результате аварийного выброса. Скорость течения реки на левой границе расчетной области задавалась равной 2 м/сек. На рисунке показаны распределения, которые реализуются через 6 мин после выброса. Под действием течения реки примесь начинает распространяться вниз по течению.

На рис. 3 представлены векторная картина течения и распределение загрязняющего вещества в момент времени  $t = 26$  мин для тех же начальных значений, что и на предыдущем ри-

сунке. Из рисунка видно, что область загрязнения расширилась и переместилась по течению реки более чем на 4 км. То есть в результате численного решения поставленной задачи возможно в динамике отслеживать уровни загрязнения воды в водоеме.



**Рис. 3.** Векторное поле скорости и распределение концентрации загрязняющей примеси для момента времени  $t = 26$  мин

### Заключение

Таким образом, в данной работе представлена математическая модель для исследования динамики загрязнения водоема с учетом различных внешних условий (температуры, скорости течения реки, концентраций загрязняющих примесей в воде и т. д.), а также параметров источника загрязнения. Сравнивая полученные данные с установленными предельно допустимыми концентрациями (ПДК), можно проанализировать уровни загрязнения по различным компонентам в различные моменты времени и предложить управленческие решения для снижения опасности использования водных ресурсов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев О.Ф., Атавин А.А., Воеводин А.Ф. Методы расчета неустановившихся течений в системах открытых русел и каналов // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1975. – Т. 6, № 4. – С. 21.
2. Гиляров Н.П. Моделирование речных потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 200 с.
3. Коваленко В.В. Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 160 с.
4. Джеймс А. Математические модели контроля загрязнения воды. – М.: Мир, 1981. – 466 с.
5. Семчуков А.Н. Численное моделирование нестационарных течений и качества воды в открытых руслах: решение прямой и обратной задач: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Барнаул, 2004. – 20 с.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – Т. 1. – 2004. – 528 с.

7. Grishin A.M. Mathematical Modeling Forest Fire and New Methods Fighting Them. F. Albini (ed.). – Tomsk: Publishing House of Tomsk University. – 1997 – P. 81-91.
8. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 184 с.
9. Stone H.L. Iterative solution of implicit approximations of multi-dimensional partial differential equations // SIAM J. Num. Anal. – 1976. – V. 5. – P. 530–558.

Поступила 08.11.2013 г.